

Esercizio 1 Si provi per induzione che

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad x^n < y^n$$

per ogni $q \neq 1$, $0 < x < y$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2 Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti condizioni

$$x - 2|x| + 2 > 0, \quad ||x| - 1| \leq 1, \quad \begin{cases} |x| \leq 2, \\ |x - 1| \leq 1, \end{cases} \quad 2x^2 - 1 \leq |x^2 + 1| - |x^2|.$$

Esercizio 3 Per quali $x, y \in \mathbb{R}$ vale la relazione $|x + y| = |x| + |y|$?

Esercizio 4 Dire quali tra i seguenti insiemi sono limitati e quali non lo sono

$$\{0\} \cup \{1\}, \quad (-\infty, 0) \cup [1, 2], \quad [-1, 1] \cup [0, +\infty), \quad \mathbb{N}.$$

Esercizio 5 Dire quale tra i seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}, \quad A \cup B, \quad A \cap B.$$

Esercizio 6 Dire quale tra i seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : 2|x - 2| \leq 3\}, \quad C \cup D, \quad C \cap D.$$

Esercizio 7 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x - x^2 > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}, \quad A \cup B, \quad A \cap B.$$

Esercizio 8 per ciascuno dei seguenti insiemi se è limitato e, in caso affermativo, calcolarne gli estremi superiore ed inferiore, indicando se si tratta di massimo e minimo, rispettivamente

$$A := \left\{ \frac{2}{3+n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B := \left\{ \frac{1+m}{1+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 9 Determinare per ciascuno dei seguenti insiemi se è limitato e, in caso affermativo, calcolarne gli estremi superiore ed inferiore, indicando se si tratta di massimo e minimo, rispettivamente

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| > 4\}, & \quad \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq 3\}, & \quad \mathbb{N} \cup \left(-\frac{10}{3}, 5 \right), \\ \{x \in \mathbb{R} : ||x| - 1| < 2\}, & \quad \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 4, x^2 - 5x + 4 > 0\}. \end{aligned}$$

Esercizio 10 Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi limitati e non vuoti. Dimostrare che, se $A \subseteq B$, allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$